Ленюк М. Скінченне гібридне інтегральне перетворення типу Бесселя–Фур'є (Конторовича–Лєбєдєва) на сегменті полярної осі / Ленюк М., Шелестовський Б. // Вісник ТНТУ. — 2011. — Том 16. — № 4. — С.185-193. — (математичне моделювання. математика. фізика).

УДК 517.91: 532.26

М. Ленюк[1], докт. фіз.-мат. наук;
Б. Шелестовський[2], канд. фіз.-мат. наук

[1]*Чернівецький факультет Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут»*
[2]*Тернопільський національний технічний університет імені Івана Пулюя*

СКІНЧЕННЕ ГІБРИДНЕ ІНТЕГРАЛЬНЕ ПЕРЕТВОРЕННЯ ТИПУ БЕССЕЛЯ–ФУР'Є (КОНТОРОВИЧА–ЛЄБЄДЄВА) НА СЕГМЕНТІ $[R_0, R_3]$ ПОЛЯРНОЇ ОСІ

Резюме. *Запроваджено інтегральне перетворення, породжене на сегменті* $[R_0, R_3]$ *полярної осі з двома точками спряження гібридним диференціальним оператором Бесселя–Фур'є (Конторовича–Лєбєдєва).*

Ключові слова: *гібридний диференціальний оператор, гібридне інтегральне перетворення, дискретний спектр, дискретна спектральна функція, ряд Фур'є, основна тотожність.*

M. Lenyuk, B. Shelestovsky

FINITE HYBRID INTEGRAL TRANSFORMATION OF THE BESSEL–FURIER (KONTOROVICH–LEBEDEV) ON THE POLAR AXIS SEGMENT $[R_0, R_3]$

The summary. *Introduced integral transformation, generated by the segment polar axis of the two coupling points hybrid differential operator Bessel–Furier (Kontorovich–Lebedev).*

Key words: *hybrid differential operator hybrid integral transform, discrete spectrum, discrete spectral function, Furier series, the main identity.*

Вступ. Класичні інтегральні перетворення Фур'є, Фур'є–Бесселя, Вебера, Ганкеля, Меліна, Лежандра та ін. служать ефективним математичним апаратом для побудови інтегрального зображення аналітичного розв'язку відповідних задач математичної фізики однорідних середовищ. З появою композитних матеріалів, гідролізів, різного характер сумішей маємо справу із задачами математичної фізики неоднорідних середовищ. Виявляється, що для їх розв'язання ефективним математичним апаратом є гібридні інтегральні перетворення, створення яких почалося в другій половині XX-го століття з роботи Я.С. Уфлянда [1]. Основи теорії гібридних інтегральних перетворень закладено в роботах [2, 3].

Метою роботи є запровадження нового типу скінченного гібридного інтегрального перетворення, що дасть можливість побудови аналітичного розв'язку ширшого класу крайових задач для диференціальних рівнянь із частинними похідними.

Постановка задачі. Розглянемо узагальнений диференціальний оператор Бесселя $B_{\nu,\alpha_1} = d^2/dr^2 + (2\alpha_1 + 1)r^{-1} d/dr - (\nu^2 - \alpha_1^2)r^{-2}$ [4], диференціальний оператор Фур'є d^2/dr^2 [5] та диференціальний оператор (Конторовича–Лєбєдєва)

$B_{\alpha_2} = r^2 \, d^2 / dr^2 + (2\alpha_2 + 1) r \, d / dr + \alpha_2^2 - \lambda^2 r^2$ [6]; $(2\alpha_j + 1) > 0, \nu \ge \alpha_1, \lambda \in (0, \infty)$. Утворимо гібридний диференціальний оператор (ГДО).

$$M_{\nu,(\alpha)} = \theta(r - R_0)\theta(R_1 - r) B_{\nu,\alpha_1} + \theta(r - R_1)\theta(R_2 - r) \, d^2 / dr^2 + \theta(r - R_2)\theta(R_3 - r) B_{\alpha_2}. \quad (1)$$

Тут $\theta(x) -$ одинична функція Гевісайда $(\alpha) = (\alpha_1, \alpha_2)$.

Запровадити на множині $I_2 = \{ r : r \in (R_0, R_1) \cup (R_1, R_2) \cup (R_2, R_3); R_0 > 0, R_3 < \infty \}$ інтегральне перетворення, породжене ГДО $M_{\nu,(\alpha)}$.

Означення. Областю визначення ГДО $M_{\nu,(\alpha)}$ назвемо множину *G* вектор-функцій $g(r) = \{ g_1(r); g_2(r); g_3(r) \}$ з такими властивостями:

1) вектор-функція $f(r) = \{ B_{\nu,\alpha_1}[g_1(r)]; g_2''(r); B_{\alpha_2}[g_3(r)] \}$ неперервна на множині I_2;

2) функції $g_j(r)$ задовольняють крайові умови

$$(\alpha_{11}^0 \, d / dr \, \beta_{11}^0) g_1(r) \, |_{r=R_0} = 0, (\alpha_{22}^3 \, d / dr \, \beta_{22}^3) g_3(r) \, |_{r=R_3} = 0. \quad (2)$$

3) функції $g_j(r)$ задовольняють умови спряження

$$[(\alpha_{j1}^k \, d / dr + \beta_{j1}^k) g_k(r) - (\alpha_{j2}^k \, d / dr + \beta_{j2}^k) g_{k+1}(r)]_{r=R_k} = 0; j, k = 1, 2. \quad (3)$$

Припускаємо, що виконані умови на коефіцієнті

$\alpha_{11}^0 \le 0, \beta_{11}^0 \ge 0, \left| \alpha_{11}^0 \right| + \beta_{11}^0 \ne 0; \alpha_{22}^3 \ge 0$

$\beta_{22}^3 \ge 0, \alpha_{22}^3 + \beta_{22}^3 \ne 0; \alpha_{jm}^k \ge 0, \beta_{jm}^k \ge 0, c_{1k} \cdot c_{2k} > 0, c_{jk} = \alpha_{2j}^k \beta_{1j}^k - \alpha_{1j}^k \beta_{2j}^k, j, k = 1, 2$.

Визначимо числа

$$\sigma_1 = \frac{c_{11} c_{12} R_2^{2\alpha_2 + 1}}{c_{21} c_{22} R_1^{2\alpha_1 + 1}}, \sigma_2 = \frac{c_{12}}{c_{22}} R_2^{2\alpha_2 + 1}, \sigma_3 = 1,$$

вагову функцію

$$\sigma(r) = \theta(r - R_0) + \theta(R_1 - r)\sigma_1 r^{2\alpha_1 + 1} + \theta(r - R_1) + \theta(R_2 - r)\sigma_2 + \theta(r - R_2) + \theta(R_3 - r)\sigma_3 r^{2\alpha_2 - 1} \quad (4)$$

та скалярний добуток

$$\left(u(r), v(r) \right) = \int_{R_0}^{R_3} u(r) v(r) \sigma(r) dr \equiv \int_{R_0}^{R_1} u_1(r) v_1(r) \sigma_1 r^{2\alpha_1 + 1} dr + \int_{R_1}^{R_2} u_2(r) v_2(r) \sigma_2 dr +$$

$$+ \int_{R_2}^{R_3} u_3(r) v_3(r) \sigma_3 r^{2\alpha_2 - 1} dr, u \in G, v \in G. \quad (5)$$

Із умов спряження (3) випливає базова тотожність

$$\left[u_k(r) v_k'(r) - u_k'(r) v_k(r) \right] |_{r=R_k} = \frac{c_{2k}}{c_{1k}} \left[u_{k+1}(r) v_{k+1}'(r) - u_{k+1}'(r) v_{k+1}(r) \right] |_{r=R_k}, k = 1, 2. \quad (6)$$

Переконаймося у справедливості рівності

$$\left(M_{\nu,(\alpha)}[g(r)], u(r) \right) = \left(g(r), M_{\nu,(\alpha)}[u(r)] \right). \quad (7)$$

Дійсно, згідно з правилом (5)

$$J \equiv \left(M_{\nu,(\alpha)}[g(r)], u(r) \right) = \int_{R_0}^{R_1} B_{\nu,\alpha_1}[g_1(r)] u_1(r) \sigma_1 r^{2\alpha_1 + 1} dr + \int_{R_1}^{R_2} \frac{d^2 g_2}{dr^2} u_2(r) \sigma_2 dr +$$

$$+\int_{R_2}^{R_3} B_{\alpha_2}[g_3(r)]u_3(r)\sigma_3 r^{2\alpha_1-1}dr\,. \qquad (8)$$

Проінтегруємо в (8) під знаком інтегралів два рази частинами

$$J=\left[\sigma_1 r^{2\alpha_1+1}\left(\frac{dg_1}{dr}u_1(r)-g_1(r)\frac{du_1}{dr}\right)\right]\Bigg|_{R_0}^{R_1}+\left[\sigma_2\left(\frac{dg_2}{dr}u_2(r)-g_2(r)\frac{du_2}{dr}\right)\right]\Bigg|_{R_1}^{R_2}+$$

$$+\left[\sigma_3 r^{2\alpha_1+1}\left(\frac{dg_3}{dr}u_3(r)-g_3(r)\frac{du_3}{dr}\right)\right]\Bigg|_{R_2}^{R_3}+\left(g(r),M_{\nu,(\alpha)}[u(r)]\right). \qquad (9)$$

Якщо $\alpha_{11}^0\neq 0$, то

$$\left.\left(\frac{dg_1}{dr}u_1-g_1\frac{du_1}{dr}\right)\right|_{R_3=r}=\frac{1}{\alpha_{11}^0}\left.\left(\alpha_{11}^0\frac{dg_1}{dr}+\beta_{11}^0 g_1\right)\right|_{r=R_0}u_1(R_0)-\frac{g_1(R_0)}{\alpha_{11}^0}\left.\left(\alpha_{11}^0\frac{du_1}{dr}+\beta_{11}^0 u_1(r)\right)\right|_{r=R_0}=$$

$$=(\alpha_{11}^0)^{-1}\left[0\cdot u_1(R_0)-0\cdot g_1(R_0)\right]=0\,.$$

Якщо $\alpha_{22}^3\neq 0$, то

$$\left.\left(\frac{dg_3}{dr}u_3-g_3\frac{du_3}{dr}\right)\right|_{R_3=r}=\frac{1}{\alpha_{22}^3}\left.\left(\alpha_{22}^3\frac{dg_3}{dr}+\beta_{22}^3 g_3\right)\right|_{r=R_3}u_3(R_3)-\frac{g_3(R_3)}{\alpha_{22}^3}\left.\left(\alpha_{22}^3\frac{du_3}{dr}+\beta_{22}^3 u_3(r)\right)\right|_{r=R_3}=$$

$$=(\alpha_{22}^3)^{-1}\left[0\cdot u_3(R_3)-0\cdot g_3(R_3)\right]=0\,.$$

Згідно з базовою тотожністю (6)

$$\sigma_1 R_1^{2\alpha_1+1}\left.\left(\frac{dg_1}{dr}u_1-g_1\frac{du_1}{dr}\right)\right|_{r=R_1}-\sigma_2\left.\left(\frac{dg_2}{dr}u_2-g_2\frac{du_2}{dr}\right)\right|_{r=R_1}=\left(\sigma_1 R_1^{2\alpha_1+1}\frac{c_{21}}{c_{11}}-\sigma_2\right)\left.\left(\frac{dg_2}{dr}u_2-g_2\frac{du_2}{dr}\right)\right|_{r=R_1}=$$

$$=\left(\frac{c_{12}}{c_{22}}-\frac{c_{12}}{c_{22}}\right)R_2^{2\alpha_1+1}(g_2'u_2-g_2u_2'),\ \sigma_2\left.\left(\frac{dg_2}{dr}u_2-g_2\frac{du_2}{dr}\right)\right|_{r=R_2}-\sigma_3 R_2^{2\alpha_2+1}\left.\left(\frac{dg_3}{dr}u_3-g_3\frac{du_3}{dr}\right)\right|_{r=R_2}=$$

$$=\left(\sigma_2\frac{c_{21}}{c_{12}}-R_2^{2\alpha_2+1}\right)\left(g_3'(R_2)u_3(R_2)-g_3(R_2)u_3'(R_2)\right)=(1-1)R_2^{2\alpha_2+1}\left(g'u_3-g_3u_3'\right)=0\,.$$

Таким чином, позаінтегральні доданки перетворюються в нуль і рівність (9) набуває вигляду (7). Звідси випливає, що ГДО $M_{\nu,(\alpha)}$ самоспряжений. Отже, його спектр дійсний. Оскільки на множині I_2 ГДО $M_{\nu,(\alpha)}$ не має особливих точок, то його спектр дискретний [3]. Якщо $\beta-$ власне число ГДО $M_{\nu,(\alpha)}$, то йому відповідає дійсна власна функція

$$V_{\nu,(\alpha)}(r,\beta)=\sum_{m=1}^{3}\theta(r-R_{m-1})\theta(R_m-r)V_{\nu,(\alpha);m}(r,\beta)\,.$$

При цьому функції $V_{\nu,(\alpha);m}(r,\beta)$ повинні задовольняти відповідно диференціальні рівняння

$$\left(B_{\nu,\alpha_1}+b_1^2\right)V_{\nu,(\alpha);1}(r,\beta)=0,\, r\in(R_0,R_1)\,,$$

$$\left(\frac{d^2}{dr^2}+b_2^2\right)V_{\nu,(\alpha);2}(r,\beta)=0,\, r\in(R_1,R_2)\,. \qquad (10)$$

$$\left(B_{\alpha_2}+b_3^2\right)V_{\nu,(\alpha);3}(r,\beta)=0,\, r\in(R_2,R_3)\,,$$

крайові умови (2) та умови спряження (3).

Фундаментальну систему розв'язків для диференціального рівняння Бесселя $(B_{\nu,\alpha_1}+b_1^2)v=0$ утворюють функції Бесселя першого роду $J_{\nu,\alpha_1}(b_1 r)$ та другого роду $N_{\nu,\alpha_1}(b_1 r)$ [4], фундаментальну систему розв'язків для диференціального рівняння Фур'є $(d^2/dr^2+b_2^2)v=0$ утворюють тригонометричні функції $\cos b_2 r$ та $\sin b_2 r$ [5]; фундаментальну систему розв'язків для диференціального рівняння (Конторовича–Лєбєдєва) $(B_{\alpha_2}+b_3^2)v=0$ утворюють функції $C_{\alpha_2}(\lambda r,b_3)$ та $D_{\alpha_2}(\lambda r,b_3)$ [6].

Якщо в міру лінійності задачі покласти

$$
\begin{gathered}
V_{\nu,(\alpha);1}(r,\beta)=A_1 J_{\nu,\alpha_1}(b_1 r)+B_1 N_{\nu,\alpha_1}(b_1 r), \\
V_{\nu,(\alpha);2}(r,\beta)=A_2\cos b_2 r+B_2\sin b_2 r. \\
V_{\nu,(\alpha);3}(r,\beta)=A_3 C_{\alpha_2}(\lambda r,b_3)+B_3 D_{\alpha_2}(\lambda r,b_3),
\end{gathered}
\tag{11}
$$

то умови спряження (3) й крайові умови (2) дають для визначення величин A_j, $B_j\,(j=\overline{1,3})$ однорідну алгебраїчну систему із шести рівнянь:

$$
\begin{gathered}
u^{01}_{\nu,\alpha_1;11}(b_1R_0)A_1+u^{02}_{\nu,\alpha_1;11}(b_1R_0)B_1=0, \\
u^{11}_{\nu,\alpha_1;j1}(b_1R_1)A_1+u^{12}_{\nu,\alpha_1;j1}(b_1R_1)B_1-v^{11}_{j2}(b_2R_1)A_2-v^{12}_{j2}(b_2R_1)B_2=0,\ j=1,2, \\
v^{21}_{j1}(b_2R_2)A_2+v^{22}_{j1}(b_2R_2)B_2-\mathrm{X}^{21}_{\alpha_2;j2}(\lambda R_3,b_3)A_3-\mathrm{X}^{22}_{\alpha_2;j2}(\lambda R_2,b_3)B_3=0. \\
\mathrm{X}^{31}_{\alpha_2;22}(\lambda R_3,b_3)A_3-\mathrm{X}^{32}_{\alpha_2;22}(\lambda R_3,b_3)B_3=0.
\end{gathered}
\tag{12}
$$

Введемо до розгляду функції

$$
\begin{gathered}
\delta_{\nu,\alpha_1,j1}(b_1R_0,b_1R_1)=u^{01}_{\nu,\alpha_1;11}(b_1R_0)u^{12}_{\nu,\alpha_1;j1}(b_1R_1)-u^{02}_{\nu,\alpha_1;11}(b_1R_0)u^{11}_{\nu,\alpha_1;j1}(b_1R_1), \\
\delta_{jk}(b_2R_1,b_2R_2)=v^{11}_{j2}(b_2R_1)v^{22}_{k1}(b_2R_2)-v^{12}_{j2}(b_2R_1)v^{21}_{k1}(b_2R_2),\ j,k=1,2, \\
\delta_{\alpha_2,j2}(\lambda R_2,\lambda R_3,b_3)=\mathrm{X}^{21}_{\alpha_2;j2}(\lambda R_2,b_3)\mathrm{X}^{32}_{\alpha_2;22}(\lambda R_3,b_3)-\mathrm{X}^{22}_{\alpha_2;j2}(\lambda R_2,b_3)\mathrm{X}^{31}_{\alpha_2;22}(\lambda R_3,b_3), \\
a_{\nu,\alpha_1;j}(\beta)\equiv\delta_{\nu,\alpha_1;11}(b_1R_0,b_1R_1)\delta_{2j}(b_2R_1,b_2R_2)-\delta_{\nu,\alpha_1;21}(b_1R_0,b_1R_1)\delta_{1j}(b_2R_1,b_2R_2), \\
b_{\alpha_2;j}(\beta)\equiv\delta_{\alpha_2,22}(\lambda R_2,\lambda R_3,b_3)\delta_{j1}(b_2R_1,b_2R_2)-\delta_{\alpha_2,12}(\lambda R_2,\lambda R_3,b_3)\delta_{j2}(b_2R_1,b_2R_2).
\end{gathered}
$$

Усі інші функції – загальновідомі [7].

Для того, щоб алгебраїчна система (12) мала ненульовий розв'язок, необхідно й достатньо, щоб її визначник дорівнював нулю:

$$
\begin{aligned}
\delta_{\nu,(\alpha)}(\beta)&\equiv\delta_{\alpha_2;22}(\lambda R_2,\lambda R_3,b_3)a_{\nu,\alpha_1;1}(\beta)-\delta_{\alpha_2;12}(\lambda R_2,\lambda R_3,b_3)a_{\nu,\alpha_1;2}(\beta)= \\
&=\delta_{\nu,\alpha_1;11}(b_1R_0,b_1R_1)b_{\alpha_2;2}(\beta)-\delta_{\nu,\alpha_1;21}(b_1R_0,b_1R_1)b_{\alpha_2;1}(\beta)=0.
\end{aligned}
\tag{13}
$$

Отримали трансцендентне рівняння для обчислення власних чисел. Якщо β_n – одне із власних чисел ГДО $M_{\nu,(\alpha)}$ (корінь рівняння (13)), то при $\beta=\beta_n(b_j(\beta_n)b_{jn})$ рівняння системи (12) стають лінійно залежними. В міру лінійної залежності відкинемо останнє рівняння в системі (12). Візьмемо $A_1=-A_0u^{02}_{\nu,\alpha_1;11}(b_{1n}R_0), B_1=A_0u^{01}_{\nu,\alpha_1;11}(b_{1n}R_0)$, де $A_0\neq 0$ підлягає визначенню. При такому виборі A_1,B_1 перше рівняння в системі (12) стає тотожною рівністю.

Для визначення величин A_2,B_2 маємо алгебраїчну систему

$$
v^{11}_{j1}(b_{2n}R_1)A_2+v^{22}_{j2}(b_{2n}R_1)B_2=A_0\delta_{\nu,\alpha_1;j1}(b_{1n}R_0,b_{1n}R_1),\ j=1,2.
$$

Звідси отримуємо, що

$$A_2 = A_0[c_{12}b_{2n}]^{-1}[\delta_{\nu,\alpha_1;11}\left(b_{1n}R_0, b_{1n}R_1\right)v_{22}^{12}\left(b_{2n}R_1\right) - \delta_{\nu,\alpha_1;21}\left(b_{1n}R_0, b_{1n}R_1\right)v_{12}^{12}\left(b_{2n}R_1\right)],$$

$$B_2 = A_0[c_{21}b_{2n}]^{-1}[\delta_{\nu,\alpha_1;21}\left(b_{1n}R_0, b_{1n}R_1\right)v_{12}^{11}\left(b_{2n}R_1\right) - \delta_{\nu,\alpha_1;11}\left(b_{1n}R_0, b_{1n}R_1\right)v_{22}^{11}\left(b_{2n}R_1\right)].$$

При відомих A_2, B_2 розглянемо алгебраїчну систему стосовно A_3, B_3

$$\mathrm{X}_{\alpha_2;j2}^{21}(\lambda R_2, b_{3n})A_3 + \mathrm{X}_{\alpha_2;j2}^{22}(\lambda R_2, b_{3n})B_3 = -A_0[c_{21}b_{2n}]^{-1}a_{\nu,\alpha_1;j}(\beta_n),\ j = 1,2.$$

Отже, отримаємо, що

$$A_3 = -\omega_{\nu,(\alpha);2}(\beta_n), B_3 = \omega_{\nu,(\alpha);1}(\beta_n), A_0 = c_{12}b_{2n}q_{\alpha_2}(\beta_n),$$

$$\omega_{\nu,(\alpha);j}(\beta_n) = a_{\nu,\alpha_1;1}(\beta_n)\mathrm{X}_{\alpha_2;22}^{2j}(\lambda R_2, b_{3n}) - a_{\nu,\alpha_1;2}(\beta_n)\mathrm{X}_{\alpha_2;12}^{2j}(\lambda R_2, b_{3n}),$$

$$q_{\alpha_2} = c_{22}sh(\pi b_{3n}) : (\pi\lambda^{2\alpha_2}R_2^{2\alpha_2+1}),\ j = 1,2.$$

Підставивши в рівності (11) визначені величини A_j, B_j, маємо функції

$$V_{\nu,(\alpha);1}(r,\beta_n) = c_{21}b_{2n}q_{\alpha_2}(\beta_n)\left[u_{\nu,\alpha_1;11}^{01}(b_{1n}R_0)N_{\nu,\alpha_1}(b_{1n}r) - u_{\nu,\alpha_1;11}^{02}(b_{1n}R_0)J_{\nu,\alpha_1}(b_{1n}r)\right],$$

$$V_{\nu,(\alpha);2}(r,\beta_n) = q_{\alpha_2}(\beta_n)\Big[\delta_{\nu,\alpha_1;11}\left(b_{1n}R_0, b_{1n}R_1\right)\varphi_{22}^1\left(b_{2n}R_1, b_{2n}r\right) -$$

$$-\delta_{\nu,\alpha_1;21}\left(b_{1n}R_0, b_{1n}R_1\right)\varphi_{12}^1\left(b_{2n}R_1, b_{2n}r\right)\Big],$$

$$\varphi_{j2}^1\left(b_{2n}R_1, b_{2n}r\right) = v_{j2}^{12}\left(b_{2n}R_1\right)\cos b_{2n}r - v_{j2}^{11}\left(b_{2n}R_1\right)\sin b_{2n}r,\ j = 1,2. \quad (14)$$

$$V_{\nu,(\alpha);3}(r,\beta_n) = \omega_{\nu,(\alpha);1}(\beta_n)D_{\alpha_2}(\lambda r, b_{3n}) - \omega_{\nu,(\alpha);2}(\beta_n)C_{\alpha_2}(\lambda r, b_{3n}).$$

Власна функція $V_{\nu,(\alpha)}(r,\beta_n)$ стає відомою.

Згідно з роботою [2] можемо сформулювати твердження.

Теорема 1 (про дискретний спектр). Корені β_n трансцендентного рівняння $\delta_{\nu,(\alpha)}(\beta) = 0$ складають дискретний спектр ГДО $M_{\nu,(\alpha)}$: дійсні, різні, симетричні відносно $\beta = 0$ й на числовій півосі $\beta > 0$ утворюють монотонно зростаючу числову послідовність з єдиною граничною точкою $\beta = \infty$.

Теорема 2 (про дискретну функцію). Система власних функцій $\{V_{\nu,(\alpha)}(r,\beta_n)\}_{n=1}^{\infty}$ ортогональна на множині I_2 з ваговою функцією $\sigma(r)$, повна й замкнена. При цьому квадрат норми власної функції $V_{\nu,(\alpha)}(r,\beta_n)$ обчислюється за звичайним правилом

$$\left\|V_{\nu,(\alpha)}(r,\beta_n)\right\|^2 = \left(V_{\nu,(\alpha)}(r,\beta_n), V_{\nu,(\alpha)}(r,\beta_n)\right) = \int_{R_0}^{R_3}\left[V_{\nu,(\alpha)}(r,\beta_n)\right]^2\sigma(r)dr. \quad (15)$$

Теорема 3 (про зображення рядом Фур'є). Будь-яка вектор-функція $g(r) \in G$ зображається за системою $\{V_{\nu,(\alpha)}(r,\beta_n)\}_{n=1}^{\infty}$ абсолютно й рівномірно збіжним на множині I_2 рядом Фур'є

$$g(r) = \sum_{n=1}^{\infty}\int_{R_0}^{R_3} g(\rho)V_{\nu,(\alpha)}(\rho,\beta_n)\sigma(\rho)d\rho\frac{V_{\nu,(\alpha)}(r,\beta_n)}{\left\|V_{\nu,(\alpha)}(r,\beta_n)\right\|^2} = \sum_{n=1}^{\infty}\int_{R_0}^{R_3} g(r)V_{\nu,(\alpha)}(r,\beta_n)\left(\left\|V_{\nu,(\alpha)}(r,\beta_n)\right\|\right)^{-1}\times$$

$$\times\sigma(r)drV_{\nu,(\alpha)}(r,\beta_n)\left(\left\|V_{\nu,(\alpha)}(r,\beta_n)\right\|\right)^{-1} \equiv \sum_{n=1}^{\infty}\int_{R_0}^{R_3} g(\rho)v_{\nu,(\alpha)}(\rho,\beta_n)\sigma(\rho)d\rho v_{(\alpha)}(r,\beta_n). \quad (16)$$

Ряд Фур'є (16) визначає пряме $H_{\nu,(\alpha)}$ й обернене $H^{-1}_{\nu,(\alpha)}$ скінченне гібридне інтегральне перетворення (СГІП), породжене на множині I_2 ГДО $M_{\nu,(\alpha)}$,

$$H_{\nu,(\alpha)}\left[g(r)\right] = \int_{R_0}^{R_3} g(r) v_{\nu,(\alpha)}(r,\beta_n)\sigma(r)dr \equiv \widetilde{g}_n . \tag{17}$$

$$H^{-1}_{\nu,(\alpha)}\left[\widetilde{g}_n\right] = \sum_{n=1}^{\infty} \widetilde{g}_n v_{\nu,(\alpha)}(r,\beta_n) \equiv g(r) . \tag{18}$$

Теорема 4 (про основну тотожність). Якщо вектор-функція $f(r) = \{B_{\nu,\alpha_1}[g_1(r)]; g''(r); B_{\alpha_2}[g_3(r)]\}$ неперервна на множині I_2, а функції $g_j(r)$ задовольняють крайові умови

$$\left(\alpha^0_{11} \frac{d}{dr} + \beta^0_{11}\right) g_1(r)\Big|_{r=R_0} = g_0, \left(\alpha^3_{22} \frac{d}{dr} + \beta^3_{22}\right) g_3(r)\Big|_{r=R_3} = g_R \tag{19}$$

та умови спряження

$$[(\alpha^k_{j1} \frac{d}{dr} + \beta^k_{j1}) g_k(r) - (\alpha^k_{j2} \frac{d}{dr} + \beta^k_{j2}) g_{k+1}(r)]\big|_{r=R_k} = \omega_{jk}; j,k = 1,2 , \tag{20}$$

то має місце основна тотожність СГІП ГДО $M_{\nu,(\alpha)}$

$$H_{\nu,(\alpha)}[M_{\nu,(\alpha)}[g(r)]] = -\beta^2 \widetilde{g}_n - \sum_{j=1}^{3} k_i^2 \widetilde{g}_{in} + (-\alpha^0_{11})^{-1} \sigma_1 R_0^{2\alpha_1+1} g_0 v_{\nu,(\alpha);1}(R_0,\beta_n) +$$
$$+ (\alpha^3_{22})^{-1} \sigma_3 R_3^{2\alpha_1+1} g_R v_{\nu,(\alpha);3}(R_3,\beta_n) + \sum_{k=1}^{2} d_k [Z^k_{\nu,(\alpha);12}(\beta_n)\omega_{2k} - Z^k_{\nu,(\alpha);22}(\beta_n)\omega_{1k}] . \tag{21}$$

Тут прийняті позначення

$$d_1 = \sigma_1 R_1^{2\alpha_1+1} : c_{11}, d_2 = \sigma_2 : c_{12},\ Z^k_{\nu,(\alpha);i2}(\beta_n) = (\alpha^k_{i2} \frac{d}{dr} + \beta^k_{i2}) v_{\nu,(\alpha);k+1}(r,\beta_n)\big|_{r=R_k} ,$$

$$\tilde{g}_{1n} = \int_{R_0}^{R_1} g_1(r) v_{\nu,(\alpha);1}(r,\beta_n)\sigma_1 r^{2\alpha_1+1} dr, \tilde{g}_{2n}(\beta) = \int_{R_1}^{R_2} g_2(r) v_{\nu,(\alpha);2}(r,\beta_n)\sigma_2 dr ,$$

$$\tilde{g}_{3n} = \int_{R_2}^{R_3} g_3(r) v_{\nu,(\alpha);3}(r,\beta_n)\sigma_3 r^{2\alpha_2-1} dr; i,k = 1,2 .$$

Правила (17), (18) та (21) складають ефективний математичний апарат для розв'язування відповідних стаціонарних та нестаціонарних задач математичної фізики неоднорідних середовищ.

Логічну схему застосування покажемо на одній із задач.

Задача 1 (статики). Побудувати обмежений в області

$$D_2 = \{(r,z): r \in I_2, z \in (-\infty,+\infty)\}.$$

Розв'язок еліптичної системи [8]

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2} + B_{\nu,\alpha_1}[u_1] - \gamma_1^2 u_1 = -f_1(r,z),\\
&\frac{\partial^2 u_2}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial r^2} - \gamma_2^2 u_2 = -f_1(r,z),\\
&\frac{\partial^2 u_3}{\partial z^2} + B_{\alpha_2}[u_3] - \gamma_3^2 u_3 = -f_3(r,z),
\end{aligned} \tag{22}$$

за крайовими умовами

$$\left(\alpha^0_{11} \frac{\partial}{\partial r} + \beta^0_{11}\right) u_1(r,z)\Big|_{r=R_0} = g_0(z), \left(\alpha^3_{22} \frac{\partial}{\partial r} + \beta^3_{22}\right) u_3(r,z)\Big|_{r=R_3} = g_R(z) \tag{23}$$

та умовами спряження

$$[(\alpha_{j1}^{k}\partial/\partial r+\beta_{j1}^{k})u_k(r,z)-(\alpha_{j2}^{k}\partial/\partial r+\beta_{j2}^{k})u_{k+1}(r,z)]|_{r=R_k}=\omega_{jk}(z);\,j,k=1,2\,. \tag{24}$$

Розв'язання. Запишемо систему (22) в матричній формі

$$\begin{bmatrix} (\frac{\partial^2}{\partial z^2}+B_{\nu,\alpha_1}-\gamma_1^2)u_1(r,z) \\ (\frac{\partial^2}{\partial z^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}-\gamma_2^2)u_2(r,z) \\ (\frac{\partial^2}{\partial z^2}+B_{\alpha_2}-\gamma_3^2)u_3(r,z) \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} f_1(r,z) \\ f_2(r,z) \\ f_3(r,z) \end{bmatrix}. \tag{25}$$

Інтегральний оператор $H_{\nu,(\alpha)}$ згідно з правилом (17) зобразимо у вигляді операторної матриці-рядка

$$H_{\nu,(\alpha)}[...]=[\int_0^{R_1}...v_{\nu,(\alpha);1}(r,\beta_n)\sigma_1 r^{2\alpha_1+1}\int_{R_1}^{R_2}...v_{\nu,(\alpha);2}(r,\beta_n)\sigma_2 dr\int_{R_2}^{R_3}...v_{\nu,(\alpha);3}(r,\beta_n)\sigma_3 r^{2\alpha_1-1}dr]. \tag{26}$$

Застосуємо операторну матрицю-рядок (27) за правилом множення матриць до системи (26). Внаслідок основної тотожності (21) отримуємо крайову задачу: побудувати обмежений на $(-\infty,+\infty)$ розв'язок диференціального рівняння Фур'є

$$\left(\frac{d^2}{dz^2}-\omega_n^2\right)\tilde{u}_n(z)=-\tilde{F}_n(z)\,. \tag{27}$$

Тут прийняті позначення

$$\omega_n^2=\beta_n^2+\gamma_1^2,\gamma_1^2=\max\{\gamma_1^2,\gamma_2^2,\gamma_3^2\},\,\tilde{u}_n=\sum_{i=1}^{3}\tilde{u}_{ni};\tilde{f}_n=\sum_{i=1}^{3}\tilde{f}_{ni},$$

$$\tilde{F}_n(z)=\tilde{f}_n(z)+(-\alpha_{11}^0)^{-1}v_{\nu,(\alpha);1}(R_0,\beta_n)\sigma_1 R_0^{2\alpha_1+1}g_0(z)+(\alpha_{22}^3)^{-1}\cdot$$

$$\cdot v_{\nu,(\alpha);3}(R_3,\beta_n)\sigma_3 R_3^{2\alpha_2+1}g_R(z)+\sum_{k=1}^{2}d_k\left[Z_{\nu,(\alpha);12}^{k}(\beta_n)\omega_{2k}^{(z)}-Z_{\nu,(\alpha);22}^{k}(\beta_n)\omega_{1k}(z)\right]. \tag{28}$$

Безпосередньо перевіряється, що розв'язком крайової задачі (28) є функція

$$\tilde{u}_n(z)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-\omega_n|z-\xi|}}{2\omega_n}\tilde{F}_n(\xi)d\xi\,. \tag{29}$$

Фунція $\tilde{u}_n(z)$ буде обмежена на $(\pm\infty)$ розв'язком диференціального рівняння (27), якщо функція $\tilde{F}_n(z)$ має скінченне граничне значення при $z\to\pm\infty$ або $\tilde{F}_n(\pm\infty)=0$.

Оператор $H_{\nu,(\alpha)}^{-1}$ згідно з правилом (18) як обернений до (26) зобразимо у формі операторної матриці-стовпця

$$H_{(\alpha)}^{-1}[...]=\begin{bmatrix}\sum_{n=1}^{\infty}v_{\nu,(\alpha);1}(r,\beta_n)\\ \sum_{n=1}^{\infty}v_{\nu,(\alpha);2}(r,\beta_n)\\ \sum_{n=1}^{\infty}v_{\nu,(\alpha);3}(r,\beta_n)\end{bmatrix}. \tag{30}$$

Застосуємо операторну матрицю-стовпець (31) за правилом множення матриць до матриці-елемента $[\widetilde{u}_n(z)]$, де функція $\widetilde{u}_n(z)$ визначена формулою (29). У результаті низки елементарних перетворень отримуємо інтегральне зображення єдиного розв'язку еліптичної крайової задачі (22)–(24)

$$u_j(r,z) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[W_{\nu,(\alpha);1j}(r,z,\varsigma) g_0(\varsigma) + W_{\nu,(\alpha);3j}(r,z,\varsigma) g_R(\varsigma) \right] d\varsigma +$$

$$+ \sum_{k=1}^{2} d_k \int_{-\infty}^{\infty} \left[R^{k,j}_{\nu,(\alpha);12}(r,z,\varsigma)\omega_{1k}(\varsigma) - R^{k,j}_{\nu,(\alpha);22}(r,z,\varsigma)\omega_{2k}(\varsigma) \right] d\varsigma +$$

$$+ \sum_{i=1}^{3} \int_{R_{i-1}}^{R_i} \int_{-\infty}^{\infty} \left[H_{\nu,(\alpha);ji}(r,\rho,z,\varsigma) f_i(\rho,\varsigma)\sigma_i \varphi_i(\rho) d\rho \right] d\varsigma, \; j = \overline{1,3},$$

$$\left(\varphi_1(r) = r^{2\alpha_1+1}, \varphi_2(r) = \sigma_2, \varphi_3(r) = r^{2\alpha_2-1} \right). \tag{31}$$

У рівності (31) беруть участь головні розв'язки еліптичної задачі (22) - (24):

1) породжені неоднорідністю системи (22) функції впливу

$$H_{\nu,(\alpha);jk}(r,\rho,z,\varsigma) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\omega_n |z-\xi|}}{2\omega_n} v_{\nu,(\alpha);j}(r,\beta_n) v_{\nu,(\alpha);k}(\rho,\beta_n), \; j,k = \overline{1,3}; \tag{32}$$

2) породжені неоднорідністю умов спряження функції Гріна

$$R^{k,j}_{\nu,(\alpha);i2}(r,z,\varsigma) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\omega_n |z-\xi|}}{2\omega_n} Z^k_{\nu,(\alpha);i2}(\beta_n) v_{\nu,(\alpha);j}(\rho,\beta_n); i,k = 1,2; \; j = \overline{1,3}; \tag{33}$$

3) породжені крайовими умовами в точках $r = R_0$ та $r = R_3$ функції Гріна

$$W_{\nu,(\alpha);1j}(r,z,\varsigma) = (-\alpha^0_{11})^{-1} R_0^{2\alpha_1+1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\omega_n |z-\xi|}}{2\omega_n} v_{\nu,(\alpha);1}(R_0,\beta_n) v_{\nu,(\alpha);j}(r,\beta_n), \; j = \overline{1,3}. \tag{34}$$

$$W_{\nu,(\alpha);3j}(r,z,\varsigma) = (\alpha^3_{22})^{-1} R_3^{2\alpha_2+1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\exp[-\omega_n |z-\xi|]}{2\omega_n} v_{\nu,(\alpha);3}(R_3,\beta_n) v_{\nu,(\alpha);j}(r,\beta_n), \; j = \overline{1,3}.$$

Зауваження. Якщо $\max\{\gamma_1^2;\gamma_2^2;\gamma_3^2\} = \gamma_2^2 > 0$, то $k_1^2 = \gamma_2^2 - \gamma_1^2 \ge 0$, $k_2^2 = 0$, $k_3^2 = \gamma_2^2 - \gamma_3^2 \ge 0$ і замість $(\beta_n^2 + \gamma_1^2)$ стоятиме $(\beta_n^2 + \gamma_2^2)$. Якщо $\max\{\gamma_1^2;\gamma_2^2;\gamma_3^2\} = \gamma_3^2 > 0$, то $k_1^2 = \gamma_2^2 - \gamma_1^2 \ge 0$, $k_2^2 = \gamma_3^2 - \gamma_2^2 \ge 0$, $k_3^2 = 0$, і замість виразу $(\beta_n^2 + \gamma_1^2)$ стоятиме вираз $(\beta_n^2 + \gamma_3^2)$.

Висновки. За наведеною вище логічною схемою будується загальний розв'язок відповідних нестаціонарних задач. Розв'язок (31) еліптичної задачі носить алгоритмічний характер. Це дає можливість використовувати його як в теоретичному дослідженні, так і в числових розрахунках. При цьому вибором параметрів можна безпосередньо із загальних структур виділити будь-який частковий випадок (у рамках даної моделі).

Література

1. Уфлянд, Я.С. О некоторых интегральных преобразованиях и их прилжениях к задачам математической физики [Текст] / Я.С. Уфлянд // Вопросы математической физики. – Л.: 1976. – С. 93–106.
2. Комаров, Г.М. Скінченні гібридні інтегральні перетворення, породжені диференціальними рівняннями другого порядку [Текст] / Г.М. Комаров, М.П. Ленюк, В.В. Мороз. – Чернівці: Прут, 2011. – 228 с.
3. Ленюк, М.П. Гібридні інтегральні перетворення (Фур'є, Бесселя, Лежандра). Частина 1 [Текст] / М.П. Ленюк, М.І. Шинкарик. – Тернопіль: Економічна думка, 2004. – 368с.

4. Ленюк, М.П. Исследования основных краевых задач для диссипативного волнового уравнения Бесселя [Текст] / М.П. Ленюк. – Киев, 1983. – 62с. (Препринт/АН УССР. Ин-т математики; 83.3).
5. Степанов, В.В. Курс дифференциальных уравнений [Текст] / В.В. Степанов. – М.: Физматгиз, 1959. – 468с.
6. Ленюк, М.П. Інтегральні перетворення типу Конторовича–Лєбєдєва [Текст] / М.П. Ленюк, Г.І. Міхалевська. – Чернівці: Прут, 2002. – 280 с.
7. Ленюк, М.П. Скінченні гібридні інтегральні перетворення, породжені класичними диференціальними операторами математичної фізики [Текст] / М.П. Ленюк. – Чернівці: Прут, 2010. – 352с.
8. Тихонов, А.Н. Уравнения математической физики [Текст] / А.Н. Тихонов, А.А. Самарский. – М.: Наука, 1972. – 735с.

Отримано 15.06.2011